BAHAN BACAAN SISWA • MATEMATIKA FASE D (SMP/MTS)

Fungsi Linear dan Grafiknya

Topik: Relasi dan Fungsi | **Fokus:** Pemahaman Konsep dan Literasi Mandiri

> **Tujuan Pembelajaran Mandiri**
>
> Setelah membaca bahan ajar ini secara mandiri, kamu diharapkan mampu:
>
> 1. Memahami konsep dasar fungsi linear, komponen penyusunnya, serta perbedaannya dengan fungsi nonlinear melalui contoh kehidupan sehari-hari.
> 2. Menggambar grafik fungsi linear pada bidang Kartesius menggunakan bilangan bulat maupun bilangan rasional (pecahan dan desimal).
> 3. Menentukan persamaan fungsi linear dari grafik atau dua titik koordinat, serta menerapkannya untuk memecahkan masalah sehari-hari.

1. Memahami Konsep Dasar Fungsi Linear dari Nol

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering melihat perubahan satu besaran yang memengaruhi besaran lainnya. Misalnya, semakin lama kamu menabung setiap minggu, semakin banyak jumlah uang di celenganmu. Atau, semakin lama kamu berjalan kaki dengan langkah yang teratur, semakin jauh jarak yang kamu tempuh.

Dalam matematika, hubungan antara dua variabel yang memiliki **laju perubahan tetap (konstan)** disebut **Fungsi Linear**. Kata *linear* berasal dari kata bahasa Inggris *line* yang berarti **garis lurus**. Jadi, jika pasangan nilai dari fungsi ini digambarkan pada bidang Kartesius, titik-titiknya akan selalu membentuk **satu garis lurus yang utuh**.

Analogi Kehidupan Sehari-hari: Tabungan Mingguan vs Pertumbuhan Tanaman

Untuk memahami hakikat fungsi linear dengan mudah, mari kita bandingkan dua situasi berikut:

- **Situasi 1 (Fungsi Linear — Pertambahan Tabungan Setiap Minggu):** Bayangkan kamu sudah memiliki uang simpanan awal sebesar Rp10.000,00 di celengan. Setiap minggu, kamu rutin memasukkan uang jajan sebesar Rp5.000,00. Minggu ke-1 uangmu menjadi Rp15.000,00, minggu ke-2 menjadi Rp20.000,00, minggu ke-3 menjadi Rp25.000,00, dan seterusnya. Perhatikan bahwa **pertambahannya selalu sama** (+Rp5.000,00 setiap minggu). Jika digambar pada grafik, kenaikan tabungan ini membentuk **garis lurus** yang miring ke atas. Contoh serupa adalah pengeluaran uang saku yang tetap setiap hari.
- **Situasi 2 (Fungsi Nonlinear — Pertumbuhan Tinggi Tanaman):** Sekarang bayangkan tinggi tanaman kacang hijau yang kamu tanam. Pada minggu pertama, tingginya bertambah cepat, tetapi setelah beberapa minggu pertumbuhannya mulai melambat seiring waktu. Karena pertambahannya **tidak tetap**, grafiknya tidak berupa garis lurus, melainkan **garis melengkung (kurva)**. Contoh lain fungsi nonlinear adalah pertumbuhan populasi bakteri yang membelah diri berlipat ganda atau luas lingkaran terhadap jari-jarinya.

Bentuk Umum Persamaan Fungsi Linear

Secara aljabar, fungsi linear memiliki variabel x yang **pangkat tertingginya adalah 1**, dan ditulis dalam bentuk umum:

$$f(x) = mx + c \quad \text{atau} \quad y = mx + c$$

Keterangan komponen penyusunnya:

- ***x*** adalah **variabel bebas** (input / daerah asal) yang nilainya dapat berupa bilangan bulat maupun **bilangan rasional** (bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$, serta bentuk desimalnya).
- ***f*(*x*) atau *y*** adalah **variabel terikat** (output / nilai fungsi) yang nilainya bergantung pada x.
- ***m*** adalah **gradien (kemiringan garis)** dengan syarat $m \neq 0$. Nilai m menunjukkan seberapa besar perubahan nilai y setiap kali x bertambah 1 satuan (pada analogi celengan tadi, m = 5.000).
- ***c*** adalah **konstanta (nilai tetap)** yang menunjukkan nilai awal fungsi saat $x = 0$, sekaligus menjadi titik potong grafik pada sumbu-Y (pada analogi celengan tadi, c = 10.000).

2. Cara Menggambar Grafik Fungsi Linear pada Bidang Kartesius

Bidang Kartesius terdiri dari dua sumbu yang saling berpotongan tegak lurus di titik pusat (0, 0), yaitu **Sumbu-*X* (sumbu mendatar/horizontal)** yang mewakili nilai input (x) dan **Sumbu-*Y* (sumbu tegak/vertikal)** yang mewakili nilai output (y atau $f(x)$). Untuk menggambar grafik fungsi linear $y = mx + c$, terdapat dua cara praktis:

Cara 1: Menggunakan Tabel Titik Bantu

1. Pilih beberapa nilai x (boleh bilangan negatif, nol, positif, pecahan, maupun desimal yang mudah dihitung).
2. Hitung nilai $y = f(x)$ untuk setiap x dengan memperhatikan urutan operasi hitung (kerjakan perkalian terlebih dahulu sebelum penjumlahan atau pengurangan).
3. Tuliskan pasangan koordinatnya dalam bentuk (x, y).
4. Letakkan titik-titik tersebut pada bidang Kartesius, lalu hubungkan dengan penggaris hingga membentuk garis lurus.

Cara 2: Menentukan Titik Potong Sumbu-X dan Sumbu-Y (Cara Cepat)

Karena sebuah garis lurus sudah pasti terbentuk jika kita memiliki **minimal dua titik**, kita cukup mencari dua titik istimewa berikut:

1. **Titik potong dengan sumbu-*Y*:** Terjadi saat nilai ***x* = 0**. Masukkan $x = 0$ ke rumus, maka diperoleh $y = m(0) + c = c$. Titik koordinatnya adalah **(0, *c*)**.
2. **Titik potong dengan sumbu-*X*:** Terjadi saat nilai ***y* = 0**. Ganti $f(x)$ atau y dengan 0, lalu selesaikan persamaan $mx + c = 0$ untuk menemukan nilai x.

Membaca Arah Kemiringan Garis dari Nilai m

- **Jika $m > 0$ (positif):** Grafik miring **naik** dari kiri bawah ke kanan atas (contoh: tabungan yang terus bertambah).
- **Jika $m < 0$ (negatif):** Grafik miring **turun** dari kiri atas ke kanan bawah (contoh: sisa kuota internet atau air di tangki yang terus berkurang).

3. Contoh Soal dan Pembahasan Langkah demi Langkah

Contoh 1 (Tingkat Dasar): Menentukan Titik Koordinat dan Grafik dari Rumus Fungsi

Soal: Diketahui sebuah fungsi linear dirumuskan dengan $f(x) = 2x - 1$ untuk x bilangan nyata.
a. Tentukan nilai fungsi untuk $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, dan $x = 2$, lalu sajikan dalam bentuk tabel pasangan koordinat!
b. Jelaskan langkah-langkah menggambar grafik fungsi tersebut pada bidang Kartesius!

Pembahasan Bagian a (Menghitung nilai fungsi dan menyusun tabel):
Alasan: Untuk mengetahui letak titik-titik yang dilalui garis pada bidang Kartesius, kita substitusikan (ganti) setiap nilai x ke dalam rumus $f(x) = 2x - 1$.

- Untuk $x = -1 \rightarrow f(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3 \rightarrow$ Titik $(-1, -3)$
- Untuk $x = 0 \rightarrow f(0) = 2(0) - 1 = 0 - 1 = -1 \rightarrow$ Titik $(0, -1)$
- Untuk $x = \frac{1}{2} \rightarrow f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow$ Titik $(\frac{1}{2}, 0)$
- Untuk $x = 2 \rightarrow f(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3 \rightarrow$ Titik $(2, 3)$

Komponen	Titik 1	Titik 2	Titik 3	Titik 4
Nilai x	-1	0	$\frac{1}{2}$ (atau 0,5)	2
Nilai $y = f(x)$	-3	-1	0	3
Titik (x, y)	$(-1, -3)$	$(0, -1)$	$(0{,}5, 0)$	$(2, 3)$

Pembahasan Bagian b (Langkah menggambar grafik pada bidang Kartesius):
Alasan: Nilai gradien $m = 2$ (positif), sehingga garis harus miring naik dari kiri bawah ke kanan atas.

1. Gambarlah sumbu mendatar X dan sumbu tegak Y yang saling berpotongan di $(0, 0)$ dengan skala jarak yang sama.
2. Tandai keempat titik dari tabel: $(-1, -3)$ di kuadran kiri bawah, $(0, -1)$ tepat pada sumbu-Y, $(0{,}5, 0)$ tepat pada sumbu-X di antara 0 dan 1, serta $(2, 3)$ di kuadran kanan atas.
3. Gunakan penggaris untuk menarik **satu garis lurus** yang menghubungkan keempat titik tersebut dan perpanjang kedua ujungnya dengan tanda panah.

Contoh 2 (Tingkat Menengah): Menentukan Persamaan Fungsi Linear dari Titik pada Grafik

Soal: Sebuah grafik fungsi linear memotong sumbu-*Y* di titik (0, 4) dan melalui titik (6, 1).
a. Tentukan rumus fungsi linear $f(x)$ yang sesuai dengan grafik tersebut!
b. Hitunglah nilai $f(-3)$ dan tentukan koordinat titik potong grafik tersebut dengan sumbu-*X*!

Pembahasan Bagian a (Menyusun rumus fungsi linear $f(x) = mx + c$):
Alasan: Titik potong sumbu-*Y* langsung memberikan nilai konstanta c, sedangkan titik kedua digunakan untuk mencari nilai gradien m.

1. **Menentukan nilai c:** Karena grafik memotong sumbu-*Y* di titik (0, 4), maka saat $x = 0$ nilai $y = 4$. Dengan demikian, $\mathbf{c = 4}$, sehingga bentuk sementara fungsinya adalah $y = mx + 4$.
2. **Menentukan nilai m:** Grafik melalui titik (6, 1), artinya saat $x = 6$ nilai $y = 1$. Substitusikan ke persamaan:
   $1 = m(6) + 4$
   $1 - 4 = 6m \rightarrow -3 = 6m$
   $m = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ (atau −0,5)
3. Jadi, rumus fungsi linearnya adalah $\mathbf{f(x) = -\frac{1}{2}x + 4}$ (atau $f(x) = -0{,}5x + 4$).

Pembahasan Bagian b (Menghitung $f(-3)$ dan titik potong sumbu-*X*):
Alasan: Untuk $f(-3)$, kita lakukan substitusi bilangan negatif ke pecahan. Untuk titik potong sumbu-*X*, kita menetapkan syarat $y = 0$.

1. **Menghitung $f(-3)$:** Ingat bahwa perkalian dua bilangan negatif menghasilkan bilangan positif: $(-\frac{1}{2}) \times (-3) = +\frac{3}{2} = 1{,}5$.
   $f(-3) = -\frac{1}{2}(-3) + 4 = 1{,}5 + 4 = \mathbf{5{,}5}$ (atau $\frac{11}{2}$)
2. **Mencari titik potong sumbu-*X* (saat $y = 0$):** Ingat bahwa membagi dengan pecahan sama dengan mengalikan dengan kebalikannya.
   $-\frac{1}{2}x + 4 = 0 \rightarrow 4 = \frac{1}{2}x$
   $x = 4 \div \frac{1}{2} = 4 \times 2 = 8$
   Jadi, grafik memotong sumbu-*X* di titik **(8, 0)**.

Contoh 3 (Penerapan Kehidupan Nyata): Pengukuran Jarak dan Waktu Berjalan Kaki

Soal: Dalam kegiatan pengamatan gerak di sekolah, Dini berjalan kaki dengan kecepatan tetap dari gerbang sekolah menuju ruang kelasnya. Jarak dari gerbang sekolah ke pos satpam adalah 6 meter. Setelah melewati pos satpam, Dini berjalan menempuh jarak 1,5 meter setiap detiknya. a. Tuliskan persamaan fungsi linear () yang menyatakan total jarak Dini dari gerbang sekolah (dalam meter) setelah berjalan selama detik melewati pos satpam! b. Buatlah tabel hubungan waktu dan jarak () untuk = 0, 2, 4, dan 6 detik, lalu jelaskan ciri grafiknya! c. Jika jarak total dari gerbang sekolah ke pintu kelas Dini adalah 33 meter, berapa detik waktu yang dibutuhkan Dini sejak melewati pos satpam?
Jtt
tJtt

Pembahasan Bagian a (Menyusun persamaan fungsi linear $J(t)$):
Alasan: Jarak awal 6 meter merupakan nilai tetap (konstanta c), sedangkan kecepatan berjalan 1,5 meter/detik merupakan laju perubahan tetap (gradien m) yang dikalikan dengan waktu tempuh t.
$$J(t) = 1{,}5t + 6$$

Pembahasan Bagian b (Membuat tabel dan menjelaskan ciri grafik):
Alasan: Kita substitusikan nilai t = 0, 2, 4, 6 ke dalam rumus $J(t) = 1{,}5t + 6$ menggunakan operasi perkalian desimal dan penjumlahan.

- Untuk $t = 0 \rightarrow J(0) = 1{,}5(0) + 6 = 0 + 6 = 6$ meter
- Untuk $t = 2 \rightarrow J(2) = 1{,}5(2) + 6 = 3 + 6 = 9$ meter
- Untuk $t = 4 \rightarrow J(4) = 1{,}5(4) + 6 = 6 + 6 = 12$ meter
- Untuk $t = 6 \rightarrow J(6) = 1{,}5(6) + 6 = 9 + 6 = 15$ meter

Besaran	Pengamatan 1	Pengamatan 2	Pengamatan 3	Pengamatan 4
Waktu t (detik)	0	2	4	6
Total Jarak $J(t)$ (meter)	6	9	12	15

Ciri Grafik: Jika digambar pada bidang Kartesius (sumbu-X untuk waktu t dan sumbu-Y untuk jarak J), grafiknya bermula dari titik (0, 6) dan membentuk **garis lurus yang miring naik** karena setiap 2 detik jarak tempuh Dini selalu bertambah secara tetap sebesar 3 meter.

Pembahasan Bagian c (Menghitung waktu tempuh untuk jarak 33 meter):
Alasan: Diketahui total jarak $J(t) = 33$, kita selesaikan persamaan linear untuk mencari nilai t (geser tanda koma satu langkah ke kanan pada pembilang dan penyebut agar pembaginya menjadi bilangan bulat):
$$1{,}5t + 6 = 33 \rightarrow 1{,}5t = 33 - 6 \rightarrow 1{,}5t = 27$$
$$t = \frac{27}{1{,}5} = \frac{270}{15} = 18$$
Jadi, waktu yang dibutuhkan Dini sejak melewati pos satpam hingga tiba di depan kelas adalah **18 detik**.

4. Hati-Hati Miskonsepsi!

Saat mempelajari materi fungsi linear dan grafiknya, ada empat jebakan pemahaman yang sering dialami siswa. Mari kenali agar kamu tidak terjebak:

Miskonsepsi 1: Mengira semua grafik yang naik atau turun adalah fungsi linear

Kesalahan umum: Siswa sering mengira setiap grafik yang terus naik merupakan fungsi linear.
Fakta sebenarnya: Jika sebuah grafik naik semakin cepat atau melambat sehingga membentuk **garis melengkung (kurva)**—seperti grafik pertumbuhan populasi bakteri atau luas lingkaran berdasarkan jari-jarinya—itu adalah **fungsi nonlinear**. Grafik fungsi linear **wajib berupa garis lurus** karena laju perubahannya selalu tetap dari awal hingga akhir.

Miskonsepsi 2: Terbalik menempatkan koordinat (x, y) pada bidang Kartesius

Kesalahan umum: Saat memplot titik (2, 5), siswa bergerak 5 langkah ke kanan pada sumbu-X dan 2 langkah ke atas pada sumbu-Y.
Fakta sebenarnya: Ingat urutan abjad: ***X* terlebih dahulu, baru *Y***. Angka pertama menunjukkan langkah **mendatar** (kanan jika positif, kiri jika negatif), sedangkan angka kedua menunjukkan langkah **tegak** (atas jika positif, bawah jika negatif). Jadi, (2, 5) berarti 2 langkah ke kanan, lalu 5 langkah ke atas.

Miskonsepsi 3: Tertukar antara syarat titik potong sumbu-*X* dan sumbu-*Y*

Kesalahan umum: Siswa sering mengira titik potong sumbu-Y dicari dengan mengganti $y = 0$.
Fakta sebenarnya: Perhatikan posisi garis sumbu-Y yang tegak lurus melewati angka 0 pada sumbu-X. Setiap titik yang menempel tepat pada sumbu-Y pasti memiliki koordinat $\boldsymbol{x = 0}$. Sebaliknya, setiap titik yang menempel tepat pada sumbu-X pasti memiliki ketinggian $\boldsymbol{y = 0}$.

Miskonsepsi 4: Menggambar garis hanya berhenti di antara dua titik bantu

Kesalahan umum: Setelah memplot dua titik bantu, misalnya (0, 1) dan (2, 5), siswa hanya menarik garis pendek yang berhenti tepat di kedua titik itu saja.
Fakta sebenarnya: Jika daerah asal (x) tidak dibatasi pada interval tertentu, garis lurus tersebut mewakili seluruh bilangan nyata dan terus memanjang tanpa batas. Oleh karena itu, tariklah garis lurus melewati kedua titik tersebut dan beri tanda panah di kedua ujungnya.

5. Rangkuman Poin-Poin Kunci

- **Fungsi Linear** adalah fungsi dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1 dan memiliki laju perubahan yang selalu tetap (konstan).
- **Bentuk Umum:** $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$, di mana $\boldsymbol{m}$ ($m \neq 0$) adalah gradien/kemiringan garis dan $\boldsymbol{c}$ adalah konstanta (titik potong pada sumbu-Y).
- **Bentuk Grafik:** Grafik fungsi linear pada bidang Kartesius selalu berupa **garis lurus**, berbeda dengan fungsi nonlinear yang grafiknya berupa **garis lengkung (kurva)**.
- **Arah Kemiringan Garis:** Jika $m > 0$, grafik miring naik dari kiri bawah ke kanan atas; jika $m < 0$, grafik miring turun dari kiri atas ke kanan bawah.
- **Dua Metode Menggambar Grafik:** Kamu dapat menggunakan **tabel titik bantu** (dengan memasukkan bilangan bulat maupun rasional seperti pecahan dan desimal) atau menentukan **titik potong sumbu-*Y* (saat $x = 0$)** dan **titik potong sumbu-*X* (saat $y = 0$)**.